Trošku o metrice:

1. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):

   (i) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (ii) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   (iii) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   (iv) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

2. Zkuste definovat : posloupnost je v metrickém prostoru (M, d) cauchyovská.
   Ukažte, že platí: Posloupnost $\{a_n\}, a_n \in R^n$ je konvergentní právě když je cauchyovská.
3. Ukažte, že platí: Z každé omezené posloupnosti $\{a_n\}, a_n \in R^n$ lze vybrat posloupnost konvergentní .
4. Množina $M \subset R^n$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená v R^n .

Početní příklady:

1. Je dána funkce $f(x,y) = \log(y - x^2)$.
   Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   Zkuste si představit graf funkce f.

2. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

3. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2 ?

   a) $f(x,y) = (x+y)^2.\cos(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$; b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$;

   d) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$.

4. „Mechanické“ derivování:
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; b) $f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$ d) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$;

   e) $f(x,y,z) = \arcsin(\dfrac{z^2}{x^2 + y^2})$.

   f) Ukažte, že funkce $f(x,y) = \log(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2 - \{(0,0)\}$ řešením rovnice $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

   (Laplaceova rovnice).

5. Diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\log(y-x^2)$ je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1, 2, 0)$.
Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně $\log(1{,}99-(1{,}02)^2)$.

b) Určete, kde následující funkce mají první i druhý diferenciál a tyto diferenciály napište:
i) $f(x,y)=\exp(x^2-y)$ (a spočítejte přibližně pomocí Taylorova polynomu 2.stupně $f(1{,}02;0{,}97)$);
ii) $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$.

c) Ukažte, že pro malá x, y platí $arctg\frac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

d) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$.

6. Je dána funkce $$f(x,y)=4\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}\ .$$

a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
b) Vypočítejte $\nabla f(0,-3)$.
c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $(0,-3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f.
d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0,-3,8)$.
e) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ?